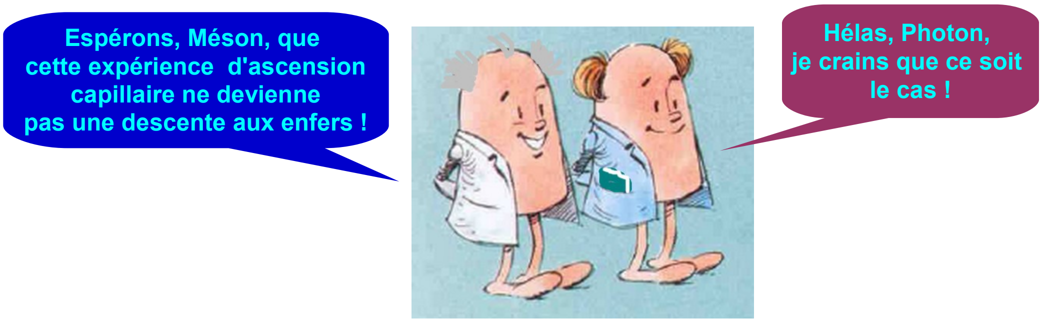
ascension capillaire dans les tubes : loi dite de Jurin

Frédéric Élie,
(avril 2017)

« Si vous ne dites rien à votre brouillon, votre brouillon ne vous dira rien ! »
Jacques Breuneval, mathématicien, professeur à l'université Aix-Marseille I, 1980

Lorsqu'un tube relativement mince est trempé verticalement dans un liquide on constate une ascension du liquide dans le tube jusqu'à une certaine hauteur : on l'explique alors par l'action des forces capillaires, ou de tension de surface du liquide, c'est pourquoi on désigne ce phénomène par « ascension capillaire ». La hauteur obtenue résulte de l'équilibration entre les forces capillaires et la force de pesanteur. Traditionnellement, la relation qui existe entre la hauteur maximale et le diamètre du tube est dite « loi de Jurin » (1718); en fait, historiquement, la formalisation des observations effectuées remonte à Francis Hauskbee (fin du XVIIe siècle, contemporain de Newton, qui s'appropria les travaux de Hauskbee sans le citer !) reçut une explication théorique complète par Laplace, lequel est, comme on le sait, le découvreur des phénomènes de tension superficielle des liquides (loi de Laplace, 1806).
La loi de montée capillaire, ou « loi de Jurin », confirme que la hauteur de l'ascension du liquide est d'autant plus grande que le diamètre du tube est petit, et selon la théorie de Laplace, ce diamètre doit être au plus égal à la longueur capillaire du liquide pour que cela se produise (soit au plus 2,7 mm pour l'eau).
Dans cet article, nous avons cherché à retrouver cette loi par une expérience faite « sur un coin de table » (comme d'hab!), avec un tube en verre de diamètre 2 mm. La manip est présentée et commentée après un bref rappel des théorèmes relatifs aux forces capillaires.
Noter que l'ascension capillaire intervient dans beaucoup de domaines du quotidien : imprégnation dans les milieux spongieux ou poreux, circulation de la sève des végétaux (pour laquelle, d'ailleurs, le processus capillaire est complété par les forces dues à la pression osmotique), etc.



1 – Un peu de théorie

Francis Hauskbee (1666-1713)

Lorsqu'un tube très fin est plongé verticalement dans un liquide mouillant, on observe l'ascension du liquide dans le tube jusqu'à une certaine hauteur maximale : c'est le phénomène d'ascension capillaire. L'astronome Giovanni Borelli montra le premier, en 1670, que la hauteur d'ascension est inversement proportionnelle au diamètre du tube, ce que vérifia aussi plus tard (1718) le physiologiste britannique James Jurin. Des expériences très détaillées effectuées par Francis Hauskbee montrèrent que le phénomène est indépendant de la géométrie du tube (hormis sa section), de son épaisseur, de la nature de son matériau (pour un tube non poreux), et qu'il se produit aussi bien dans l'air que dans le vide. Le processus physique responsable de l'ascension capillaire reçut une explication définitive par P-S. De Laplace (1806) en termes de tension de surface que le savant venait de découvrir et de formaliser (mais à cette époque l'explication du phénomène de tension de surface d'un liquide par des interactions moléculaires n'était pas encore avancée).
Pour les bases théoriques de l'ascension capillaire dans un tube, la figure 1 donne la géométrie et les notations du problème.

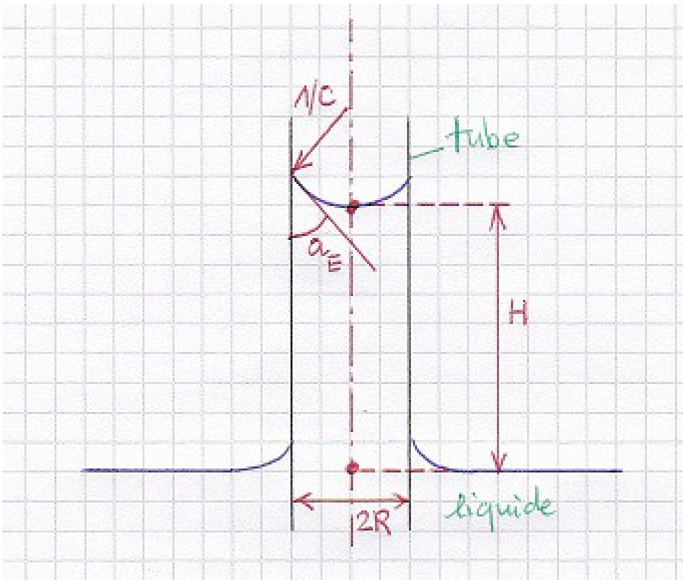


Figure 1 : ascension capillaire dans un tube plongé dans un liquide

Les contacts aux différentes interfaces solide/air, solide/liquide, liquide/air font intervenir les énergies de surface (ou tension de surface, exprimées en N/m) respectivement égales à :
γ_{SO} pour l'interface solide/air (donc ici paroi du tube/air) ;
γ_{SL} pour l'interface solide/liquide (donc ici paroi du tube/liquide) ;
γ pour l'interface liquide/air (donc ici la surface libre du liquide au contact de l'air).
La différence entre l'énergie par unité de surface du substrat sec et du substrat mouillé est

appelée paramètre d'étalement, et vaut par conséquent ([1]):

$$S=\gamma_{SO}-(\gamma_{SL}+\gamma) \quad \text{(en J/m², soit encore N/m)} \quad (1)$$

Soit a_E l'angle de contact entre la surface libre du liquide et la substrat solide ; on montre alors que cet angle est fixé par les différentes tensions de surface :

$$\gamma \cos a_E=\gamma_{SO}-\gamma_{SL} \quad (2)$$

et donc que le paramètre d'étalement s'écrit aussi :

$$S=\gamma(\cos a_E-1) \quad \text{(relation de Young)} \quad (3)$$

Si $a_E < \pi/2$ (ménisque bombé vers le bas) le liquide est mouillant, et si $a_E > \pi/2$ (ménisque bombé vers le haut) le liquide est peu mouillant. Dans tous les cas, l'existence de a_E n'a de sens que si S est négatif. Dans le cas général il faut s'en tenir au signe de S dans la relation (1) : il y a mouillage total si S > 0 (dans ce cas, pas d'angle de mouillage, comme cela s'observe avec l'hélium liquide qui envahit toute la surface du substrat solide).

Mais la situation est différente pour l'ascension capillaire, parce que celle-ci se produit si l'énergie de surface du tube sec (sans liquide) est plus grande que celle du tube mouillé (avec le liquide). En effet, l'ensemble tube + liquide tend à diminuer son énergie de surface, vers un nouvel état d'équilibre, si la surface mouillée remplace de la surface sèche ; donc si $\gamma_{SL} < \gamma_{SO}$, état où l'énergie de surface est grande, l'ensemble atteindra spontanément un nouvel état d'équilibre où γ_{SL} se rapprochera de γ_{SO} : le liquide montera dans le tube pour accroître la surface mouillée. Le paramètre du phénomène n'est donc plus ici S mais le ***paramètre d'imprégnation*** :

$$I=\gamma_{SO}-\gamma_{SL} \quad (4)$$

Il y a alors ascension capillaire si $I > 0$, et descente capillaire (le liquide descend dans le tube) si au contraire $I < 0$. D'après (2) l'ascension capillaire a lieu pour $a_E < 90°$(elle se produit donc pour des liquides assez mouillants).
Noter que, par (2), (4) s'écrit aussi :

$$I=\gamma \cos a_E \quad (5)$$

Calculons l'énergie de la colonne de liquide entre les points A (niveau de la surface libre du liquide en-dehors du tube) et le point B (niveau de la surface libre dans le tube), la hauteur de la colonne étant H, l'élévation capillaire :

E = gain d'énergie de surface + énergie potentielle de pesanteur nécessaire pour compenser l'énergie de surface

Si le rayon du tube R est petit devant H, le bilan précédent prend la forme :

---

1 Voir ces définitions et théorèmes dans :
- Chapelet de gouttes sur un fil horizontal : instabilité de Plateau-Rayleigh - par Frédéric Élie, avril 2017, site http://fred.elie.free.fr
- Étalement des gouttes sur une surface plane : loi de Tanner - par Frédéric Élie, 25 mars 2017, site http://fred.elie.free.fr
- Gouttes pendantes sous un plan horizontal : instabilité de Rayleigh-Taylor – par Frédéric Élie, avril 2017, site http://fred.elie.free.fr
- Effets capillaires des liquides : TP sur la longueur capillaire – par Frédéric Élie, 9 janvier 2017, site http://fred.elie.free.fr
- Ondes de surface des liquides - par Frédéric Élie, février 2009, site http://fred.elie.free.fr

$$E = -2\pi R H I + \frac{1}{2}\pi R^2 H^2 \rho g \quad (6)$$

PREUVE de (6) :
Elle est immédiate :
énergie de surface pour l'interface cylindrique liquide/tube = I x surface latérale du cylindre = *I* x *S* = *I* x 2πR x H ;
énergie potentielle de pesanteur de la colonne liquide de hauteur H =

$$\int_0^H g H \pi R^2 \rho dH = \frac{1}{2}\pi R^2 \rho g H^2$$

CQFD pour (6).
L'énergie E est minimale pour une hauteur H telle que : $\frac{\partial E}{\partial H} = 0$ ce qui donne la hauteur d'ascension capillaire (ou « loi de Jurin »), compte tenu de (5) :

$$\boxed{H = 2\frac{\gamma}{\rho g}\frac{\cos a_E}{R}} \quad (7)$$

Remarque : la longueur capillaire d'un liquide étant définie par $\kappa^{-1} = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}$, la relation (7) s'écrit aussi :

$$H = 2(\kappa^{-1})^2 \frac{\cos a_E}{R} \quad (8)$$

On retrouve bien la relation en 1/R entre la hauteur d'ascension et le rayon du tube (le liquide peut monter très haut dans les tubes très fins) ; cette ascension est d'autant plus importante que la longueur capillaire du liquide est grande (autrement dit pour R << κ^{-1}). En ordre de grandeur, pour l'eau, le liquide atteint 1 mètre dans un tube de 10 μm.

2 – Manip

La longueur capillaire de l'eau étant de l'ordre de 2,7 mm, on a choisi un tube assez fin, en verre, de diamètre intérieur 2R = 2 mm. Le dispositif très sommaire est celui de la figure 2.

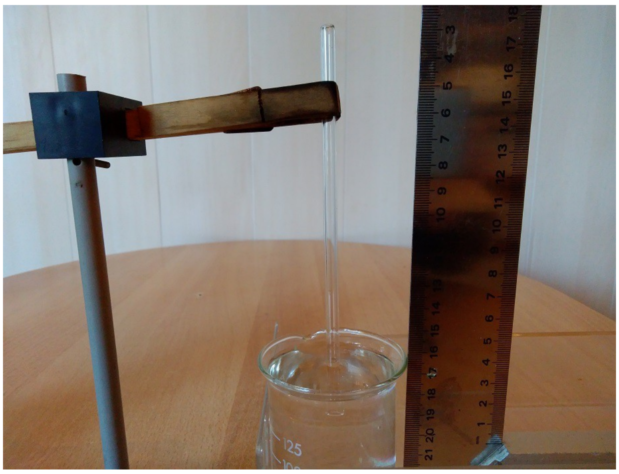


figure 2 : dispositif employé

Il n'est pas facile de mesurer avec précision l'angle de contact a_E ; on l'a supposé égal à 0° (le ménisque a alors la forme d'une demi-sphère tangente aux parois du tube). Ce n'est pas le cas en réalité ! La hauteur d'ascension (figure 3) est de l'ordre de H = 12 à 15 mm.

Figure 3 : évaluation de la hauteur d'ascension de l'eau dans un tube de diamètre 2mm

Avec l'hypothèse a_E = 0°, (8) fournirait H = 15 mm. Cela ne signifie pas pour autant que notre résultat est bon : avec un angle de contact de l'ordre de 30° ou de 45° (valeurs plus probablement proches de la réalité), la théorie donnerait respectivement H = 13 mm et H = 10 mm. L'ordre de grandeur « mesuré » est bon mais on ne peut pas dire que notre manip fournisse un résultat précis.

Enfin, l'expérience avec un tube plus large (diamètre 6 mm) a été tentée : comme on s'y attendait, étant bien au-delà de la longueur capillaire de l'eau, l'ascension capillaire observée est très faible (H = 1 mm) en comparaison de ce qu'aurait donné (8) si toutefois cette relation était encore valide (ce qui n'est pas le cas!) : 3,5 mm.

Une expérience réussie dans ce domaine nécessiterait deux précautions incontournables :
- choisir des tubes de diamètre bien inférieur à la longueur capillaire du liquide ;
- mesurer avec précision l'angle de contact, ce qui est d'autant plus difficile que, précisément, le tube est très fin.